Selectietoets

vrijdag 10 maart 2017

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij n een even positief geheel getal. Een rijtje van n reële getallen noemen we *volledig* als voor elke gehele m met $1 \leq m \leq n$ geldt dat de som van de eerste m termen of de som van de laatste m termen van het rijtje geheel is. Bepaal het minimale aantal gehele getallen in een volledig rijtje van n getallen.

Oplossing. We bewijzen dat het minimale aantal gehele getallen in een volledig rijtje gelijk aan 2 is. Bekijk eerst het geval $n = 2$. Noem a_1 en a_2 de getallen in het rijtje. Dan is a_1 of a_2 geheel, zeg zonder verlies van algemeenheid a_1. Verder is $a_1 + a_2$ geheel, maar dan is ook a_2 geheel. Dus het rijtje bevat minstens twee gehele getallen.
Bekijk nu het geval $n > 2$. Schrijf $n = 2k$ (want n is even) met $k \geq 2$. Dan is $a_1+a_2+\ldots+a_k$ of $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}$ geheel. Maar omdat de som van beide uitdrukkingen ook geheel is, zijn ze allebei geheel. Verder is $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}$ of $a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_{2k}$ geheel. Hieruit volgt dat a_k of a_{k+1} geheel is. Daarnaast weten we dat a_1 of a_{2k} geheel is en die vallen niet samen met a_k of a_{k+1} omdat $k \geq 2$. Dus minstens twee verschillende getallen zijn geheel.
Ten slotte laten we zien dat het voor elke even n mogelijk is om een volledig rijtje met precies twee gehele getallen te maken. Schrijf weer $n = 2k$. Als k oneven is, nemen we $a_1 = a_{k+1} = 1$ en alle overige termen gelijk aan $\frac{1}{2}$. De som van alle getallen in het rijtje is geheel, dus het is voldoende om nog te laten zien dat de som van de eerste of laatste m termen geheel is met $1 \leq m \leq k$; de gevallen met $m > k$ volgen dan direct. Voor oneven $m \leq k$ zijn de eerste m termen samen geheel, voor even $m < k$ juist de laatste m termen. Als k even is, nemen we juist $a_1 = a_k = 1$ en alle overige termen gelijk aan $\frac{1}{2}$. Nu is voor oneven $m < k$ de som van de eerste m termen geheel en voor even $m \leq k$ de som van de laatste m termen. Verder is de som van alle termen bij elkaar geheel, dus het gevraagde volgt ook voor $m > k$.
We concluderen dat het minimale aantal gehele getallen in een volledig rijtje van n getallen 2 is. $\square$

Opgave 2. Gegeven is de functie $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ die voldoet aan de eigenschappen:

(i) $f(p) = 1$ voor alle priemgetallen p,

(ii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Bepaal de kleinste $n \geq 2016$ met $f(n) = n$.

Oplossing. We bewijzen allereerst dat voor priemgetallen p en positieve gehele getallen k geldt dat $f(p^k) = kp^{k-1}$. Dit doen we met inductie naar k. Voor $k = 1$ staat er $f(p) = 1$ en dat is gegeven. Zij nu $l \geq 1$ en stel dat we het bewezen hebben voor $k = l$. Bekijk $k = l + 1$. Dan passen we de tweede eigenschap toe met $x = p$ en $y = p^l$:

$$f\left(p^{l+1}\right) = f\left(p \cdot p^l\right) = p^l \cdot f(p) + p \cdot f\left(p^l\right) = p^l + p \cdot lp^{l-1} = (l+1)p^l.$$

Dit voltooit de inductie. Nu bewijzen we dat voor verschillende priemgetallen p_1, p_2, ..., p_t en positieve gehele getallen a_1, a_2, ..., a_t geldt dat

$$f\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}\right) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_t}{p_t}\right).$$

We bewijzen dit met inductie naar t. Voor $t = 1$ is het precies de formule die we hiervoor bewezen hebben. Zij nu $r \geq 1$ en stel dat we het bewezen hebben voor $t = r$. Dan passen we weer de tweede eigenschap toe:

$$\begin{aligned}
f\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot p_{r+1}^{a_{r+1}}\right) &= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot f\left(p_{r+1}^{a_{r+1}}\right) + p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot f\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}\right) \\
&= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot a_{r+1} p_{r+1}^{a_{r+1}-1} + p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_r}{p_r}\right) \\
&= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot \frac{a_{r+1}}{p_{r+1}} + p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_r}{p_r}\right) \\
&= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} p_{r+1}^{a_{r+1}} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_r}{p_r} + \frac{a_{r+1}}{p_{r+1}}\right).
\end{aligned}$$

Dit voltooit de inductie.
Voor een geheel getal $n > 1$ van de vorm $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t}$ met de p_i verschillende priemgetallen, is de eigenschap $f(n) = n$ dus equivalent met

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t} \cdot \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_t}{p_t}\right) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_t^{a_t},$$

oftewel

$$\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_t}{p_t} = 1.$$

Vermenigvuldigen met $p_1 p_2 \cdots p_t$ geeft

$$a_1 p_2 p_3 \cdots p_t + a_2 p_1 p_3 \cdots p_t + \ldots + a_t p_1 p_2 \cdots p_{t-1} = p_1 p_2 \cdots p_t.$$

Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat p_1 het kleinste priemgetal is dat voorkomt in de priemfactorisatie van n. In de uitdrukking hierboven is p_1 een deler van de rechterkant en van elke term aan de linkerkant behalve eventueel de eerste. Maar dan moet p_1 ook een deler van de eerste term zijn. Aangezien $p_2, \ldots, p_t$ allemaal priemgetallen ongelijk aan p_1 zijn, kan dat alleen als $p_1 \mid a_1$. In het bijzonder geldt dan $a_1 \geq p_1$, zodat $\frac{a_1}{p_1} \geq 1$. We zien nu dat hier gelijkheid moet gelden en dat $t = 1$, omdat de som van alle $\frac{a_i}{p_i}$ anders groter dan 1 wordt. Dus $n = p^p$ voor een zeker priemgetal p.
We zoeken dus de kleinste $n \geq 2016$ van de vorm $n = p^p$. Er geldt $3^3 = 27$ en $5^5 = 3125$, dus de gevraagde n is gelijk aan 3125. $\square$

Opgave 3. Zij ABC een driehoek met $\angle A = 90^\circ$ en zij D het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A. De middens van AD en AC noemen we respectievelijk E en F. Zij M het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle BEF$. Bewijs dat $AC \parallel BM$.

Oplossing. Vanwege de rechte hoeken bij A en D geldt $\triangle ADB \sim \triangle CAB$ (hh). Hieruit volgt $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CA|}{|CB|}$. Omdat $|AE| = \frac{1}{2}|AD|$ en $|CF| = \frac{1}{2}|CA|$ geldt ook $\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|}$. Uit de vorige gelijkvormigheid volgt ook dat $\angle BAE = \angle BAD = \angle BCA = \angle BCF$, dus met (zhz) krijgen we nu $\triangle AEB \sim \triangle CFB$. Hieruit volgt $\angle ABE = \angle CBF$.
Verder is EF een middenparallel in driehoek ADC, dus $EF \parallel BC$. Met Z-hoeken geeft dit $\angle CBF = \angle BFE$. Vanwege de middelpunts-omtrekshoekstelling en vervolgens de hoekensom in gelijkbenige driehoek EBM geldt $\angle BFE = \frac{1}{2}\angle BME = 90^\circ - \angle EBM$. Dus $\angle ABE = \angle CBF = 90^\circ - \angle EBM$. We concluderen dat $\angle ABM = \angle ABE + \angle EBM = 90^\circ$. Dus $AC \parallel BM$. $\square$

Opgave 4. Een viertal (a, b, c, d) van positieve gehele getallen met $a \leq b \leq c \leq d$ noemen we *goed* indien we ieder geheel getal rood, blauw, groen of paars kunnen kleuren zodat

- van iedere a opeenvolgende getallen er tenminste één rood is;
- van iedere b opeenvolgende getallen er tenminste één blauw is;
- van iedere c opeenvolgende getallen er tenminste één groen is;
- van iedere d opeenvolgende getallen er tenminste één paars is.

Bepaal alle goede viertallen met $a = 2$.

Oplossing. We bekijken steeds alleen viertallen (a, b, c, d) van positieve gehele getallen met $a \leq b \leq c \leq d$. Ieder viertal met $b \geq 6$ voldoet: we kleuren dan de even getallen rood en de oneven getallen achtereenvolgens blauw, groen, paars, blauw, groen, paars, etc. Verder voldoet ieder viertal met $b \geq 4$ en $c \geq 8$: we kleuren dan de even getallen rood, de getallen 1 mod 4 blauw, de getallen 3 mod 8 groen en de getallen 7 mod 8 paars. We gaan bewijzen dat dit de enige mogelijkheden zijn.

Stel $(2, b, c, d)$ is goed. We bekijken een paars getal. De buren van dit getal moeten rood zijn, dus dan hebben we 3 opeenvolgende getallen waarvan er geen blauw is. Dus $b \geq 4$. Als $b \geq 6$, dan voldoet het viertal, zoals we hebben gezien. Stel nu dus dat $b = 4$ of $b = 5$. We bekijken een paars getal. Deze heeft twee rode buren. Aan minstens één van beide kanten staat een blauw getal, zeg links. Daar weer links van komt een rood getal. Dus we hebben $RBRPR$. Bij de volgende twee getallen in het rijtje zit in elk geval een rode en in elk geval een blauwe, dus zeker geen groene. We hebben daarmee 7 opeenvolgende getallen zonder groene, dus $c \geq 8$. We hebben al gezien dat dit geval voldoet.

We concluderen dat de volgende viertallen $(2, b, c, d)$ de goede viertallen zijn: die met $b \geq 6$ en die met $b \geq 4$ en $c \geq 8$. $\square$

Opgave 5. Bepaal alle paren priemgetallen (p, q) zodat $p^2 + 5pq + 4q^2$ het kwadraat van een geheel getal is.

Oplossing. Schrijf $p^2 + 5pq + 4q^2 = a^2$, met $a \geq 0$ een geheel getal. De linkerkant is gelijk aan $(p + 2q)^2 + pq$, dus we kunnen dit herschrijven tot $pq = a^2 - (p + 2q)^2$, oftewel $pq = (a - p - 2q)(a + p + 2q)$. De tweede factor rechts is groter dan p en groter dan q, maar het is wel een deler van pq. Omdat p en q priem zijn, moet het wel gelijk zijn aan pq, dus $a + p + 2q = pq$. En dan is $a - p - 2q = 1$. Trek deze twee van elkaar af: $pq - 1 = (a + p + 2q) - (a - p - 2q) = 2(p + 2q)$, oftewel $pq - 2p - 4q - 1 = 0$. Dit kunnen we herschrijven tot $(p - 4)(q - 2) = 9$. De factor $q - 2$ kan niet negatief zijn, dus is $p - 4$ dat ook niet. De factoren moeten dus gelijk zijn aan 1 en 9 of aan 9 en 1 of aan 3 en 3. Dit geeft respectievelijk voor (p, q) de mogelijkheden $(5, 11)$, $(13, 3)$ en $(7, 5)$. Controleren laat zien dat $p^2 + 5pq + 4q^2$ in elk van die gevallen een kwadraat is, namelijk respectievelijk 28^2, 20^2 en 18^2. Dus deze drie tweetallen zijn de oplossingen. $\square$